



Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs  
Session 2009

Concours Mathématiques et Physique  
Épreuve de Physique

Date : Jeudi 04 Juin 2009      Heure : 8 H 00      Durée : 4 H      Nbre pages : 06  
Barème : Problème 1 : 15 pts      ;      Problème 2 : 05 pts

*L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.*

*L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.*

*Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.*

Données utiles :

- Le vide est caractérisé par sa permittivité électrique  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ F.m}^{-1}$  et sa perméabilité magnétique  $\mu_0$
- Célérité de la lumière dans le vide :  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- Charge élémentaire :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Masse de l'électron :  $m = 9,10 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- Constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
- Constante de Planck :  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
- Gradient en coordonnées sphériques :  $\overline{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$
- $\text{div}(f \cdot \vec{u}) = f \cdot \text{div} \vec{u} + \vec{u} \cdot \overline{\text{grad}} f$

**Problème 1**

L'espace est rapporté à un référentiel  $\mathcal{R}(Oxyz)$  de base orthonormée directe  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . On note  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  la base sphérique.

**Dipôle électrostatique dans le vide**

On considère un ensemble de deux charges ponctuelles fixes :  $(-q)$  en  $N\left(0, 0, -\frac{a}{2}\right)$  et  $(+q)$  en  $P\left(0, 0, +\frac{a}{2}\right)$  du référentiel  $\mathcal{R}(Oxyz)$  (Figure 1). Les quantités  $a$  et  $q$  sont positives. Un point  $M$  dans l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ .

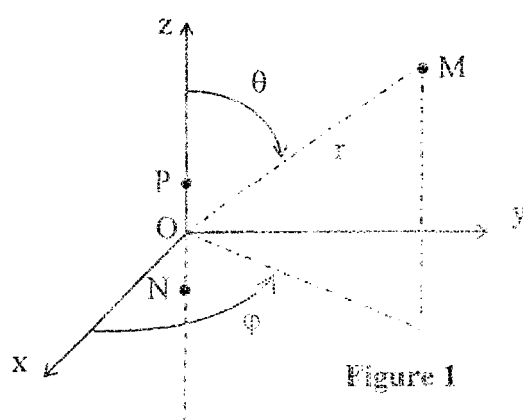


Figure 1

- 1- Donner l'expression du moment dipolaire  $\vec{p}$  de ce doublet de charges.
- 2- Indiquer, en le justifiant, les variables d'espace dont dépendent le champ et le potentiel électriques créés par ce dipôle.
- 3- Citer l'approximation dipolaire puis établir l'expression du potentiel  $V(M)$  au point M.
- 4-
  - 4-1- En déduire les composantes  $(E_r, E_\theta, E_\phi)$  du champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  dans la base sphérique.
  - 4-2- Montrer que  $\vec{E}(M)$  peut se mettre sous la forme :  $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{k(\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}$ , où  $k$  est un facteur numérique à déterminer.
  - 4-3- Déterminer la norme de  $\vec{E}(M)$ .
- 5-
  - 5-1- Déterminer l'équation polaire des surfaces équipotentielles.
  - 5-2- Déterminer l'équation polaire des lignes de champ.
  - 5-3- Représenter leurs allures sur un même schéma.
- 6- Le dipôle rigide  $\vec{p}$  est maintenant plongé dans un champ électrostatique extérieur uniforme  $\vec{E}_{ext}$ .
  - 6-1- Déterminer les actions mécaniques subies par ce dipôle.
  - 6-2- Déterminer l'énergie potentielle d'interaction  $U_p$  du dipôle avec  $\vec{E}_{ext}$ .
  - 6-3- Étudier les possibilités d'équilibre du dipôle ainsi que leur stabilité.

### Approche de l'interaction de Van Der Waals (VDW) entre deux molécules

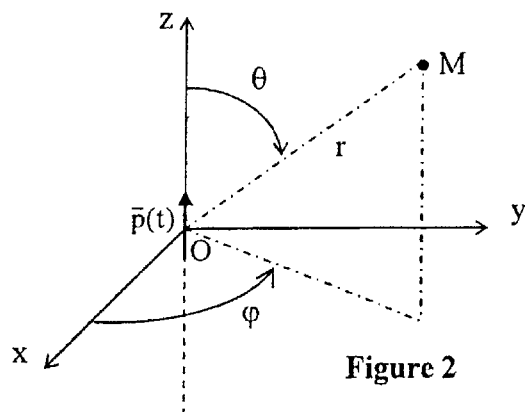
Le modèle consiste à considérer une molécule polaire de moment dipolaire  $\vec{p}$ , placée au point O, et une molécule non polaire, placée au point M où elle subit le champ  $\vec{E}(M)$  créé par  $\vec{p}$ . Étant polarisable, la molécule non polaire acquiert un moment dipolaire induit  $\vec{p}_i = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$  où  $\alpha$  est une constante.

La force d'interaction entre les deux molécules dérive de l'énergie potentielle  $U_p = -k' \vec{p}_i \cdot \vec{E}$ , où  $k'$  est un facteur numérique.

- 7-
  - 7-1- Quelle est l'unité de  $\alpha$  ?
  - 7-2- Numériquement  $\alpha \approx 10^{-30}$  SI. Proposer une signification de  $\alpha$ .
- 8- Déterminer qualitativement si  $k'$  est supérieur, inférieur ou égal à 1.
- 9- Déterminer, dans la base sphérique, les composantes de la force  $\vec{F}$  subie par la molécule en M.
- 10-1- En réalité, la molécule en O, tourne librement sur elle-même. Sachant que toutes les orientations sont équiprobables, déterminer les valeurs moyennes des composantes de  $\vec{F}$ .
- 10-2- Quelle est alors la direction effective de la force d'interaction ? Est-elle attractive ou répulsive ?

## Rayonnement dipolaire

Au point O se trouve un dipôle oscillant (Figure 2), de moment dipolaire  $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ .



Le potentiel vecteur  $\vec{A}(M, t)$  créé par ce dipôle en un point M  $(r, \theta, \phi)$  s'écrit, en notation complexe :

$$\vec{A}(M, t) = j\omega p_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{j\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \vec{u}_z$$

11- Déterminer le potentiel scalaire  $V(M, t)$ . Interpréter le résultat.

12- Donner les expressions des champs électrique  $\vec{E}(M, t)$  et magnétique  $\vec{B}(M, t)$  en fonction des potentiels vecteurs  $\vec{A}(M, t)$  et scalaire  $V(M, t)$ .

Le calcul du champ électrique donne :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{2p_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(1 + j\frac{r\omega}{c}\right) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \vec{u}_r + \frac{p_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(1 + j\frac{r\omega}{c} - \left(\frac{r\omega}{c}\right)^2\right) e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} \vec{u}_\theta$$

13- Justifier que cette expression est en accord avec la symétrie du problème étudié.

14-

14-1- Interpréter les différents termes qui apparaissent dans l'expression de  $\vec{E}(M, t)$ .

14-2- Définir la zone du rayonnement du dipôle et déduire l'expression du champ électrique rayonné.

15- Sachant que l'onde rayonnée est localement plane, déterminer l'expression du champ magnétique rayonné  $\vec{B}(M, t)$ .

16- Déterminer l'expression du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}(M, t)$ , ainsi que sa valeur moyenne dans le temps.

17- Montrer que la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r centrée sur le

dipôle, s'écrit :  $\mathcal{P}_R = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$ .

Interpréter le fait que  $\mathcal{P}_R$  ne dépend pas de r.

## Diffusion Rayleigh du rayonnement électromagnétique

On étudie l'interaction d'une onde électromagnétique plane incidente de champ électrique  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$  avec un milieu diélectrique linéaire, homogène, isotrope et non magnétique ( $\mu = \mu_0$ ) de faible densité  $N = 10^{25}$  atomes.m<sup>-3</sup>. En l'absence du champ électromagnétique, chaque atome possède un moment dipolaire électrique nul.

On adopte le modèle de l'électron élastiquement lié. Chaque atome comporte un électron mobile non relativiste de masse  $m$ , de charge  $q = -e$  et de vecteur déplacement  $\vec{r}$  vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}_0 \cos(\omega t), \text{ où } \omega_0 \text{ est une constante positive.}$$

- 18- Interpréter les différents termes de cette équation différentielle.  
 19- Citer les approximations adoptées et les justifier.  
 20- Etablir l'expression de  $\vec{r}(t)$  en régime sinusoïdal forcé.  
 21- En déduire l'expression du moment dipolaire induit  $\vec{p}(t)$ . Préciser son amplitude  $p_0(\omega)$ .  
 22- En déduire la puissance moyenne  $P_R$  rayonnée par  $\vec{p}(t)$ .  
 23-  
 23-1- Déterminer la puissance moyenne  $P_i$  de l'onde incidente traversant sous incidence normale une surface  $S$ .  
 23-2- En déduire la relation entre  $P_R$  et  $P_i$ .  
 24- La puissance rayonnée par diffusion correspond à une diminution de  $P_i$  lors de la propagation de l'onde dans le milieu. On admet que  $P_i$  varie lentement avec  $x$ .  
 24-1- En faisant un bilan énergétique sur un cylindre de section  $S$  situé entre  $x$  et  $x+dx$ , montrer que :

$$\frac{dP_i(x)}{dx} = -\frac{P_i(x)}{\ell_c}, \text{ où } \ell_c \text{ est une grandeur à déterminer.}$$

- 24-2- Déterminer l'expression de  $P_i$  et donner la signification physique de  $\ell_c$ .  
 25- On se place dans le cas où  $\omega \ll \omega_0$  (Diffusion Rayleigh) :  
 25-1- Montrer que  $\ell_c = \frac{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4 \omega_0^4}{N\omega^4 e^4}$ .  
 25-2- Calculer la valeur de  $\ell_c$  pour des ondes électromagnétiques correspondantes aux radiations rouge ( $\lambda_R = 800 \text{ nm}$ ) et bleue ( $\lambda_B = 400 \text{ nm}$ ). La longueur d'onde associée à  $\omega_0$  est  $\lambda_0 = 122 \text{ nm}$ .  
 25-3- En déduire une interprétation de la couleur bleue du ciel et de la couleur rouge du soleil couchant.

### Rayonnement d'une antenne demi-onde

L'antenne demi-onde est couramment utilisée pour produire des ondes électromagnétiques dans l'espace caractérisé par les constantes du vide ( $\epsilon_0, \mu_0$ ). Cette antenne peut être considérée comme une association de dipôles élémentaires.

On considère une antenne verticale formée d'une tige métallique rectiligne fine, de longueur  $L = \frac{\lambda}{2}$ , parcourue par le courant  $i(z, t) = I_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right)\cos(\omega t)$ , où  $I_0$  est une constante (Figure 3).

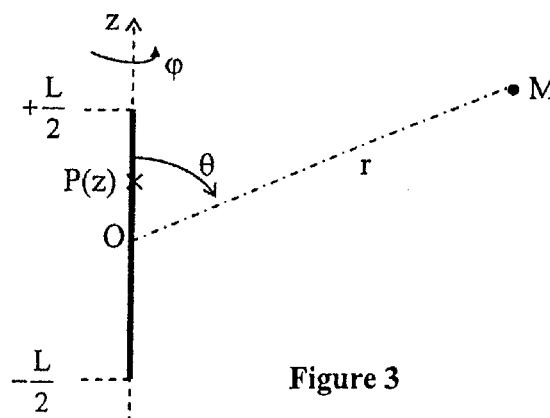


Figure 3

Un élément de longueur  $dz$  parcouru par  $i(z,t)$  peut être assimilé à un dipôle élémentaire de moment  $\delta\vec{p} = \delta p \vec{u}_z$  tel que  $\frac{\partial}{\partial t}(\delta\vec{p}) = i(z,t) dz \vec{u}_z$ .

26- En utilisant les résultats de la question 14-, montrer que le champ rayonné au point M par un dipôle élémentaire, placé en O, peut se mettre sous la forme :

$$d\vec{E}_O(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta p(t)) \right]_{\left(t-\frac{r}{c}\right)} \sin\theta \vec{u}_\theta$$

27- Montrer que le déphasage entre le champ  $d\vec{E}_r(M,t)$  créé par un dipôle élémentaire placé en P ( $OP = z$ ) et  $d\vec{E}_O(M,t)$  s'écrit approximativement :  $\varphi \approx \frac{\omega}{c} z \cos\theta$ .

28- En déduire le champ électrique  $\vec{E}(M,t)$  rayonné par l'antenne demi-onde.

Simplifier l'expression trouvée en admettant que  $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \approx 0,95 \cdot \sin^2\theta$ .

29- Justifier le fait que le champ magnétique rayonné s'écrit :  $\vec{B}(M,t) = \frac{E(M,t)}{c} \vec{u}_\varphi$ . Donner alors son expression.

30- Déterminer l'expression du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}(M,t)$  ainsi que sa valeur moyenne dans le temps  $\langle \vec{\Pi}(M,t) \rangle$ .

31- Tracer l'allure du diagramme de rayonnement de l'antenne  $\|\langle \vec{\Pi}(M,t) \rangle\| = f(\theta)$ . Commenter.

32- Déterminer la puissance moyenne rayonnée par l'antenne  $P_R$  à travers une sphère de centre O et de rayon  $r$ .

33- En déduire la résistance du rayonnement définie par  $P_R = \frac{1}{2} R_{ray} I_0^2$ .

## Problème 2 : Rayonnement thermique

1- Rappeler la définition d'un corps noir.

2- Rayleigh et Jeans proposent un modèle classique dans lequel l'énergie volumique spectrale du corps noir en équilibre à la température T, est donnée par :

$$u_{v,RJ} = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2$$

où  $\nu$  est la fréquence exprimée en Hertz.

1- Tracer l'allure de  $u_{v,RJ}$  en fonction de  $\nu$  et la comparer à la courbe expérimentale correspondante.

2- En déduire une explication de la contradiction appelée historiquement « catastrophe ultra-violet ».

L'interprétation actuelle du rayonnement du corps noir en équilibre à la température T, montre que son énergie volumique spectrale s'écrit :

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

1- Etudier les cas limites de  $u_\nu(\nu, T)$  en fonction de  $\nu$ .

2- Montrer que l'énergie volumique totale  $u$  obéit à la loi :  $u = a T^4$ . Donner l'expression de la constante a et calculer sa valeur numérique.

on donne :  $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$

4- Déterminer l'expression de l'énergie volumique spectrale  $u_\lambda(\lambda, T)$  en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ .

5- Etablir la loi de Wien, liant la longueur d'onde  $\lambda_m$  du maximum d'émission du corps noir à sa température  $T$ .

On donne : l'équation  $e^x(5-x) = 5$  admet la valeur  $x_m = 4,97$  comme solution.

6- Calculer  $\lambda_m$  et préciser son domaine spectral dans les deux cas :

a- Surface terrestre à  $T = 300$  K.

b- Surface du soleil à  $T = 5800$  K.

On admet, dans la suite, que le soleil possède une forme sphérique de rayon  $R_s = 7,0 \cdot 10^8$  m et se comporte comme un corps noir de température  $T_s = 5800$  K.

7-1- Rappeler la loi de Stefan. La constante de Stefan vaut  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  SI. Préciser son unité.

7-2- Déterminer la puissance totale  $P_s$  rayonnée par le soleil.

8- En déduire l'expression de la puissance  $P_t$  reçue par la terre.

On note  $d$  la distance moyenne de la terre au soleil et  $R_t$  le rayon de la terre supposée sphérique.

9-1- En supposant que la terre est un corps noir de température  $T_0$ , montrer que  $T_0 = T_s \sqrt{\frac{R_s}{2d}}$ .

9-2- Calculer la valeur de  $T_0$ . Commenter.

On donne  $d = 1,5 \cdot 10^{11}$  m.

10- En fait, la terre est entourée par l'atmosphère qui peut être assimilée à une couche sphérique de même centre que la terre et d'épaisseur  $e$  (très faible ( $e \ll R_t$ )). L'atmosphère de température  $T_a$  permet de maintenir le sol à une température  $T_p$  (Effet de Serre).

Le modèle adopté suppose que :

- La terre et l'atmosphère rayonnent comme des corps noirs.
- L'atmosphère absorbe la fraction  $\alpha$  du rayonnement solaire et la totalité du rayonnement provenant de la terre.
- La terre absorbe la fraction  $(1-\alpha)$  du rayonnement solaire et la totalité du rayonnement provenant de l'atmosphère vers la terre.

10-1- Ecrire les équations traduisant les équilibres radiatifs pour l'atmosphère et pour la terre.

10-2- En déduire l'expression de  $T_p$ .

10-3- Calculer la valeur numérique de  $T_p$  pour  $\alpha = 0,85$ . Commenter le modèle considéré.

Fin de l'Épreuve